10ª Conferência Internacional da LARES

Setembro 15-17, 2010 São Paulo, Brasil

A polêmica da capitalização de juros na Tabela Price: uma abordagem matemática

Benvenho, Agnaldo Calvi[1]

[1] Autônomo, Rua Maestro Fco. Fortunato, 786, cjto. 84, Presidente Prudente, SP, Brasil, abenvenho@terra.com.br

RESUMO

O sistema de amortização francês, conhecido no Brasil como Tabela Price, é um dos principais métodos para cálculo de prestações de dívidas, amplamente utilizada no Sistema Financeiro Imobiliário (SFI). Tem havido grande polêmica relativa à ocorrência de capitalização de juros na Tabela Price, evento proibido no ordenamento legal brasileiro. Isto tem gerado questionamentos, sobretudo no campo jurídico, resultando em milhares de ações judiciais. Muitos destes questionamentos são desprovidos de qualquer fundamento matemático. Neste artigo, apresentamos um tratamento analítico do modelo matemático da Tabela Price, buscando trazer uma contribuição técnica ao tema.

Palavras-chave: Tabela Price, capitalização de juros.

Tabela Price's interest capitalization polemic: a mathematical approach

ABSTRACT

French amortization scheduler, known in Brazil as Tabela Price, is one of the most used methods for amortization schedule, and is widely used on Brazilian real estate financial system. There has been occurring much polemic regarding the existence of interest capitalization in Tabela Price, which is forbidden in Brazilian legal system. This polemic leads to many questioning, specially in legal area, resulting in thousands of civil suits. Many of these questionings have no mathematical basis. In this paper, we present an analytical approach of Tabela Price mathematical model, trying to bring a technical contribution on the theme.

Key-words: Tabela Price, interest capitalization.

1. INTRODUÇÃO

O sistema francês de amortização, conhecido no Brasil como Tabela Price, de acordo com Rezende (2009) é o sistema de amortização mais utilizado no mundo. No Brasil, não é diferente, sendo ele largamente difundido em operações de crédito.

Também é o mais polêmico. Tem havido grande número de ações e trabalhos questionando sua legalidade. A principal alegação é a ocorrência da capitalização de juros, evento restrito no ordenamento jurídico brasileiro.

O grande volume de capital direcionado às operações de crédito, que na área de financiamento imobiliário gira em torno de 30 bilhões de reais, e de financiamento de veículos chega à monta de 80 bilhões, de acordo com estatísticas do Banco Central, acaba ressaltando a importância dos sistemas de amortização e, sobretudo, da Tabela Price.

No entanto, muitas alegações sobre a capitalização de juros na Tabela Price pecam pela falta de embasamento matemático, o que torna grande parte das contestações mero exercício de semântica. Como será visto, a estrutura matemática da Tabela Price, *a priori*, parece incorporar a capitalização de juros. Entretanto, uma análise mais detalhada mostra que isto não ocorre.

Outro ponto importante é a confusão entre os termos capitalização de juros e contagem de juros sobre juros. Neste trabalho, partiremos da premissa que o significado de ambos é o mesmo, embora em sentido estrito, não sejam.

2. TABELA PRICE

De acordo com Del Mar (2001), um sistema de amortização é o plano segundo o qual se pagará uma dívida. Ainda segundo aquele, a Tabela Price consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, onde o valor de cada prestação é composto por duas subparcelas distintas: uma de juros e outra de amortização do capital.

A mesma foi idealizada pelo teólogo inglês Richard Price (1723-1791) para cálculo do valor de aposentadorias e pensões, tendo sido empregada na amortização de empréstimos na França do século XIX (daí o nome Sistema de Amortização Francês).

Matematicamente, temos que, para uma determinada dívida P, a ser paga em n parcelas A, iguais, sucessivas, compostas por juros do empréstimo e amortização do capital, sendo i o juro sobre a dívida, podemos calcular a parcela A pela Eq. 1.

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \tag{1}$$

Além disso, considerando C_j como a parcela relativa a amortização do capital no período j e J_j a parcela relativa aos juros, a Eq. 2 exprime a relação entre as mesmas e a parcela de pagamento A:

$$A = C_j + J_j \tag{2}$$

A Tabela Price é largamente utilizada nas operações de crédito e nas transações a prazo, sobretudo, segundo Souza e Clemente (2000), por apresentar parcelas iguais. Outra grande vantagem, apontada por Aragão (2006), especialmente nas operações do Sistema Financeiro da Habitação, é de que a mesma apresenta parcelas iniciais inferiores em relação a outros sistemas de amortização, implicando num menor comprometimento inicial de renda, tornando as operações mais atraentes.

De acordo com Bernardes (2009), a Tabela Price é utilizada em todo o mundo. Acrescentamos que ela não é conhecida por este nome no exterior, mas simplesmente por Sistema de Amortização. Isto pode ser comprovado por uma busca no Google (www.google.com) pelos termos *Amortization Schedule* ou *Amortization Calculator Formula*, onde emerge o modelo matemático da Tabela Price.

Mesmo diante de suas vantagens, tem havido polêmicas sobre a legalidade da Tabela Price. No ordenamento legal brasileiro, a capitalização de juros, utilizada como sinônimo a contagem de juros sobre juros e anatocismo, é restrita. E existem várias alegações de que a Tabela Price inclui a capitalização de juros em sua estrutura.

Provavelmente, o fator exponencial $(1+i)^n$ existente no numerador da fórmula matemática da Tabela Price, e que é equivalente ao modelo de juros compostos, tenha levado a esta confusão. Autores como Campos Filho *et al* (2004) afirmam que a mesma é construída sobre a teoria dos juros compostos.

3. CAPITALIZAÇÃO

A ocorrência de capitalização na Tabela Price é o principal deflagrador das polêmicas que recaem sobre ela. No entanto, a confusão sobre o termo e as interpretações resultantes da confusão acabam criando questionamentos baseados apenas em argumentações semânticas.

Diante disso, é necessário estabelecer o significado do termo capitalização, de modo a que as análises relativas à mesma no âmbito da Tabela Price sejam válidas. Trata-se da questão da demarcação, que em sentido mais amplo é responsável por distinguir a ciência da metafísica, mas neste caso busca delimitar os aspectos científicos do problema (capitalização na Tabela Price) de argumentações desprovidas de caráter científico. Muito embora Popper (2007) combata a significação como princípio de demarcação científica, a mesma é suportada por Wittgenstein (2001) e suficiente a nossos propósitos.

Capitalização é uma forma de acumulação de riqueza. O termo é definido por Nunes (1999) como o ato de converter em capital, adicionar os lucros ao capital para auferir novos rendimentos. Para Silva (1998), significa a conversão dos rendimentos ou dos frutos de um capital em capital. Logo, capitalização de juros é a soma dos juros ao capital original, com objetivo de contar novos juros.

A capitalização, por si própria, não pode ser proibida, pois se assim fosse, a acumulação de riquezas seria vedada. De acordo com Cançado e Lima (1999), o que é defeso no ordenamento legal é a capitalização de juros no sentido de somar os mesmos ao capital inicial para render novos juros, em período inferior a um ano, a não ser para algumas operações financeiras específicas, reguladas por legislação própria.

A proibição da capitalização em períodos inferiores a um ano tem origem no Decreto nº 22.626, de 7 de abril de 1933, também conhecido como Lei da Usura, que em seu artigo 4º dispõe: "*É proibido contar juros dos juros; esta proibição não compreende a acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta corrente de ano a ano*".

Da errônea interpretação deste artigo da lei surgiu a Súmula nº 121 do Supremo Tribunal Federal, cujo verbete determina: "*É vedada a capitalização de juros, ainda que expressamente convencionada*".

Parece claro que a súmula em questão proíbe a capitalização de juros no sentido de contar novos juros. Também parece claro que esta proibição restringe-se a períodos inferiores a um ano. A interpretação literal da súmula levaria a uma conclusão absurda: que os juros provenientes de um empréstimo nunca poderiam ser incorporados ao capital do credor.

Outro ponto fundamental é estabelecer que, conceitualmente, existem diferenças entre sistemas de capitalização, que tem como objetivo acumulação de capital e sistemas de amortização, cujo objetivo é retornar capital. Tal diferenciação é apresentada em Chaves (2002).

O próximo passo é analisar a forma como os juros são adicionados ao capital. Vieira Sobrinho (2000) informa que há dois regimes possíveis: a capitalização simples, onde os juros são calculados apenas sobre o capital inicial e a capitalização composta, no qual os juros são adicionados ao capital do período anterior para renderem novos juros.

Surgem assim os conceitos de juros simples e juros compostos. Pontes de Miranda (1984) explica que juros simples são aqueles que não produzem juros e compostos aqueles que fluem dos juros. Matematicamente, considerando um capital inicial C, emprestado a uma taxa de juros i por um período n, se transformará em diferentes capitais finais, Cs e Cc, expressos pelas Eqs. 3 e 4, conforme a utilização do regime de juros simples ou compostos.

$$Cs = C(1 + ni) \tag{3}$$

$$Cc = C(1 + i)^n \tag{4}$$

Como visto acima, a capitalização pode ser feita de forma simples ou composta. A proibição quanto à capitalização de juros que se depreende do ordenamento legal é a capitalização composta, ou seja, o juro composto.

Logo, dentro deste trabalho, serão usados os termos capitalização e contagem de juros sobre juros como sinônimos. Embora em estritamente há diferenças, em sentido lato a igualdade dos termos pode ser adotada.

A Eq. 4 é base de um dos argumentos favoráveis a tese da capitalização da Tabela Price. Segundo Scavone Jr. (2003), os juros são calculados de forma composta, com a utilização da expressão exponencial, o que comprova a capitalização. Ela também é base para a argumentação de que a Tabela Price é baseada na teoria de juros compostos, decorrendo daí a capitalização.

Um outro termo, constantemente associado à argumentação quanto a ilegalidade da Tabela Price, é o anatocismo. De acordo com Silva (1998), anatocismo é a contagem ou cobrança de juros sobre juros. Definição similar é encontrada em Nunes (1999).

Logo, o conceito de capitalização abarcará também o termo anatocismo. Muito embora não haja menção ao mesmo nas normas legais, ele é bastante disseminado no jargão jurídico.

4. DEDUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA TABELA PRICE

4.1 Formulação do Problema

Modelo é uma estrutura que descreve, de forma aproximada, um fenômeno qualquer. Modelo matemático é um sistema axiomático consistindo de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de idéias do mundo real. Usualmente, um modelo matemático é expresso por uma equação ou conjunto de equações, embora um conjunto de regras possa ser um modelo, como, por exemplo, em Russell (2007), a estrutura de geração de números inteiros.

O modelo matemático da Tabela Price é expresso pelas Eqs. 1 e 2. A Eq. 1 expressa como é calculada a parcela através deste sistema de amortização, ao passo que a Eq. 2 exprime uma restrição no fenômeno modelado. Esta restrição, embora seja dispensável no cálculo da parcela de pagamento da dívida, é fundamental para a derivação do modelo, bem como nos dá informações relativas à sua estrutura interna.

A dedução de um modelo matemático muitas vezes é ligada a necessidade de interpretação de um fenômeno ou de solução de um problema. Modelos podem ser deduzidos através do uso de regras estabelecidas ou derivados de dados experimentais.

No caso da Tabela Price, buscou-se a dedução de um sistema de pagamentos relativos a uma divida inicial, na qual existiam as seguintes condições:

- O capital inicial seria emprestado no instante 0, ou seja, naquele instante, o saldo devedor seria igual ao capital inicial;
- As parcelas de pagamento teriam de ser iguais ao longo de todos os pagamentos;
- Cada parcela deveria conter um componente relativo ao pagamento do capital inicial e outro relativo ao pagamento dos juros;
- As parcelas deveriam ser pagas ao final de cada período;
- O saldo devedor no período seria calculado através da dedução do saldo devedor anterior pelo componente responsável pela amortização, na parcela;
- Os juros ao longo de todo o período devem ser calculados sobre o saldo devedor.

4.2 Derivação do Modelo

Através das restrições acima, mostraremos a dedução da expressão matemática da Tabela Price, considerando que será emprestado um capital **P**, a uma taxa de juros **i**, a ser pago em **n** parcelas iguais **A**, sendo que cada uma delas contemple uma parte da amortização do capital e outra relativa ao pagamento de juros.

A partir dos dados apresentados e das condições impostas, pode se construir uma expressão matemática para o saldo devedor **p(n)** em qualquer período como função de P, i, A e n. Pela definição, o saldo devedor no período t = 0 é igual ao capital emprestado, ou.

$$p(0) = P$$

Ao fim do período 1, de acordo com as definições apresentadas, incidirá uma taxa de juros i e será paga uma parcela A, ficando o saldo a seguir

$$p(1) = P(1+i) – A$$

Seguindo o mesmo princípio, para os períodos 2 e 3 teremos.

$$p(2) = p(1)(1+i) – A = [P(1+i) – A](1+i) – A = P(1+i)^2 – A(1+i) – A$$

$$p(3) = P(1+i)^3 – A(1+i)^2 – A(1+i) – A$$

A partir daí, podemos generalizar a função para um período n, através da Eq. 5.

$$p(n) = P(1+i)^n – A(1+i)^{n-1} – A(1+i)^{n-2} - ... – A(1+i) – A \qquad (5)$$

Como queremos que o saldo devedor no período n seja zero, igualamos a Eq. 5 a zero.

$$P(1+i)^n = A(1+i)^{n-1} – A(1+i)^{n-2} - ... – A(1+i) – A$$

Considerando que P, i e n são dados, é necessário calcular A que satisfaça a condição acima. Considerando os termos da direita da igualdade como uma progressão geométrica com primeiro termo 1 e razão (1+i), podemos determinar a soma dos t termos da mesma.

$$\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = 1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

Resultando na Eq. 6, que é similar a Eq. 1, expressão da Tabela Price.

$$P(1+i)^n = A\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (6)$$

4.3 Conseqüências da Dedução Matemática

A partir da dedução do modelo, podemos extrair informações relevantes para uma análise formal da Tabela Price.

Inicialmente, percebe-se que em nenhum momento foi utilizada a teoria dos juros compostos. É fácil ver que em cada etapa da derivação do modelo foi empregado o juro simples, incidindo apenas sobre o saldo devedor.

Desta primeira conclusão surgem dois questionamentos importantes. O primeiro é relativo à afirmação de Price (1771), de que a tabela em questão é baseada em juros compostos.

Não se olvida que Richard Price entendia ser sua tabela derivada da aplicação de juros compostos. No entanto, a idéia do formulador original e a correta interpretação não são necessariamente coincidentes. Além disso, a hipótese deve testada, de acordo com Popper (2007), e somente será válida se resistir ao falseamento empírico. Como vimos, não é isso o que ocorre. Além disso, modelos matemáticos podem ter interpretações diversas.

Um caso famoso é a equação da onda de Schrödinger, deduzida pelo físico de mesmo nome. Segundo Popper (1973), Schrödinger estava equivocado a respeito do problema que resolveu através da função de onda, pois pensava que as ondas possuíam densidade de carga mutável. Mais tarde, o físico alemão Max Born deu uma explicação estatística da amplitude das ondas, interpretação esta que desagradou Schrödinger enquanto viveu, mas que rendeu a Born um Prêmio Nobel de Física. Outro exemplo famoso é a reformulação da Teoria da Relatividade Especial por Hermann Minkowski, pela qual, segundo Simonsen (1994), o próprio Albert Einstein afirmou que agora era ele quem não entendia a teoria da relatividade.

O segundo ponto se relaciona ao termo $P(1+i)^n$, que é similar à equação dos juros compostos (Eq. 4). Neste caso, a utilização da forma exponencial tem a simples finalidade de generalização. Tanto é que, como veremos na próxima seção, este termo pode ser eliminado sem alterar a estrutura do modelo.

Além disso, se buscássemos explicar o modelo matemático através da teoria do juro composto, chegaríamos a conclusão que houve capitalização também das parcelas de pagamento, que são depreendidas dos termos $A(1+i)^{n-1}$, $A(1+i)^{n-2}$ e seguintes da Eq. 5. E tal situação não faz sentido, haja vista que as parcelas já foram pagas.

De qualquer forma, é possível a interpretação da Tabela Price através da teoria dos juros compostos, a qual, também não implica em capitalização de juros.

A expressão matemática (Eq. 1) tem no numerador o termo $(1+i)^n$. Este termo pode ser entendido como o fator de capitalização composto. Por outro lado, em seu denominador encontra-se o termo $(1+i)^n - 1$. Este termo é o fator de desconto. Na literatura financeira (Gitman, 2002), pode-se constatar que a operação desconto é a inversa da capitalização.

Deste modo, percebe-se que sobre o termo Pi da equação matemática da Tabela Price são aplicadas simultaneamente as operações capitalização e desconto, com o mesmo período e mesma taxa de juros, sendo que na operação desconto o valor 1 corresponde a uma defasagem temporal.

Decorrendo daí, a operação capitalização é "anulada" pela operação desconto, não ocorrendo à composição de juros, o que é coerente com as demonstrações apresentada.

Outra informação que pode ser depreendida da dedução apresentada é a forma como são calculados os juros na Tabela Price. É nítido que os mesmos incidem apenas sobre o saldo devedor, ou seja, a parcela que já foi amortizada no período anterior. Decorre daí que os juros não são adicionados ao capital para contagem de novos juros.

Por fim, uma conclusão de fundamental importância é de que a estrutura do modelo matemático da Tabela Price, com seus termos exponenciais, é devida a condição restritiva na qual todas as parcelas do plano do pagamento são iguais.

5. ANÁLISE MATEMÁTICA DA CONTAGEM DE JUROS NA TABELA PRICE

5.1 Um Exemplo Numérico

Várias obras apresentam exemplos numéricos sobre como evoluem o saldo devedor, os juros e a amortização em operações simuladas com a parcela de pagamento através da Tabela Price. Vemos os mesmos em Chaves (2002), Del Mar (2001) e Rezende (2009), dentre outros.

Tais exemplos numéricos, embora percam generalidade, são excelentes para entender como evoluem as quantias em um financiamento da Tabela Price. Também são úteis, no caso deste trabalho, para dar suporte a demonstração matemática apresentada na seção anterior.

Na Tab. 1, apresentamos uma simulação numérica para uma operação com as seguintes características: o valor emprestado é de R$ 1.000,00, a taxa de juros é de 2% ao mês e o período de pagamento é de 10 meses.

Tab. 1: Simulação de uma operação através da Tabela Price

Mês	Saldo Devedor	Taxa Juros	Juros	Amortização	Parcela
0	1.000,00	2,00%	0,00	0,00	0,00
1	908,67	2,00%	20,00	91,33	111,33
2	815,51	2,00%	18,17	93,16	111,33
3	720,49	2,00%	16,31	95,02	111,33
4	623,57	2,00%	14,41	96,92	111,33
5	524,72	2,00%	12,47	98,86	111,33
6	423,88	2,00%	10,49	100,84	111,33
7	321,03	2,00%	8,48	102,85	111,33
8	216,12	2,00%	6,42	104,91	111,33
9	109,15	2,00%	4,32	107,01	111,33
10	0,00	2,00%	2,18	109,15	111,33

Observando a coluna juros, percebemos que os mesmos sempre são calculados sobre o saldo devedor do período anterior. Por exemplo, o juro do período 1 é de R$ 20,00, correspondente a R$ 1.000,00 x 0,02.

Sendo a parcela de R$ 111,13, o componente amortização será de R$ 91,33, que é a diferença entre a parcela e o componente juro, acarretando que o saldo devedor no período 1 será de R$ 908,67.

Repetindo a sistemática, o juro no período 2 será de R$ 18,17, o que é igual a R$ 908,67 x 0,02 (salvo por arredondamentos), decorrendo que o componente amortização será de R$ 93,16 e o saldo devedor, R$ 815,51.

Este exemplo evidencia a não existência da acumulação de juros sobre o saldo devedor do próximo período, acarretando aí a não capitalização de juros.

5.2 Um Método Empírico para o Cálculo da Parcela de Pagamento

Neste item, mostraremos o cálculo da parcela de pagamento de uma dívida sem utilizar o modelo matemático da Tabela Price, mas com as mesmas condições e restrições daquele, e que apresenta o mesmo resultado.

Consideremos que um emprestador quer calcular as parcelas de amortização de um empréstimo, de R$ 100,00, com taxa de juro de 1% ao mês e período de 3 meses (estamos utilizando o período curto para facilitar os cálculos).

Supomos que ele não conheça a Tabela Price. Também supomos que o emprestador queira que o plano de pagamento tenha as seguintes características:

(1) O empréstimo se daria no instante 0, onde o saldo devedor será igual ao capital inicialmente emprestado neste período;
(2) As três parcelas de pagamento seriam iguais;
(3) Cada parcela possui um componente relativo aos juros do empréstimo e outro relativo à amortização do capital inicial;
(4) As parcelas seriam pagas ao final de cada período;
(5) O saldo devedor de um período é calculado como a subtração do saldo devedor do período anterior pelo componente de amortização;
(6) Os juros incidiriam apenas sobre o saldo devedor.

As condições acima são as mesmas utilizadas na dedução do modelo matemático da Tabela Price (vide seção 4). Para este exemplo vamos considerar uma expressão para o saldo devedor em função do período, idêntica a Eq. 5.

Da condição (1), teremos o saldo devedor no período 0.

$$p(0) = 100$$

Da condição (2), temos que a parcela será igual para todos os períodos. Denominaremos a mesma de A. Da condição (3), temos a Eq. 7.

$$A = J_t + C_t \tag{7}$$

Ainda da condição (3), consideraremos que os componentes de Juros (J_t) e da amortização (C_t) não sejam iguais. Veremos que esta condição é verdadeira. Logo, para os três períodos onde ocorrerá o pagamento das parcelas, teremos componentes dispostos na Tab. 2.

Tab. 2: Componentes relativos a juros e a amortização para pagamento da dívida

Período	Parcela	Juro	Amortização
1	A	J_1	C_1
2	A	J_2	C_2
3	A	J_3	C_3

Agora, passamos a calcular os pagamentos e a evolução do saldo devedor. No período 1, decorrendo da condição (5) e usando a Eq. 7, temos:

$p(1) = p(0)(1+i) – A = 100 \text{ x } (1,01) – A$

Derivado da Tab. 1, vem:

$p(1) = 100 \text{ x } 1,01 – J_1 – C_1$

Mas, decorrente da condição (6), temos:

$J_n = p(n-1) \text{ x } i$

Desta implicação, chegamos a o juro no período 1.

$J_1 = p(0) \text{ x } i = 100 \text{ x } 0,01 = 1$

Assim, teremos que o saldo devedor no período 1 será:

$p(1) = 100 – C_1$

Seguindo a mesma sistemática, os saldos devedores nos períodos 2 e 3 serão:

$p(2) = 100 – C_1 – C_2$ e $p(3) = 100 – C_1 – C_2 – C_3$

Como estamos lidando com um sistema de amortização, sabemos que o saldo devedor deverá ser zero no final do período 3. Logo, igualando o saldo devedor a 0, temos a Eq. 8.

$$C_1 + C_2 + C_3 = 100 \qquad (8)$$

No entanto, sabemos que a parcela de pagamento A é a soma dos componentes de juros e de amortização em cada período, de acordo com a Eq. 7, o que equivale a:

$A = J_1 + C_1 = J_2 + C_2 = J_2 + C_2$

A Eq. 7 nos permite escrever J_1, J_2 e J_3 em função dos saldos devedores. Os componentes de amortização C_1, C_2 e C_3 podem ser escritos em função da parcela A:

$C_1 = A – 1$, $C_2 = 1,01A – 1,01$ e $C_3 = 1,0201A – 1,0201$

Substituindo os três termos na Eq. 8, determina-se a parcela A, objetivo deste cálculo, **A = 34,00221**, que é exatamente igual àquele obtido através do modelo matemático da Tabela Price. Perceba-se que em nenhum momento foi utilizada a composição de juros.

5.3 O Coeficiente $(1+i)^n$ no Modelo Matemático da Tabela Price

Os exemplos apresentados nas subseções 5.1 e 5.2 esclarecem a inexistência de capitalização na Tabela Price. Entretanto, é alegado, que o coeficiente exponencial $(1+i)^n$, pelos que defendem a tese de existência de capitalização na Tabela Price, como evidência do uso dos juros compostos.

Após a dedução do modelo, na seção 4, explicamos que o mesmo trata-se apenas de uma forma de generalização, não implicando a incidência de juros compostos. Isto pode ser comprovado no cálculo da parcela de amortização exibido em 5.2.

Vamos mostrar, matematicamente, que é possível reduzir o coeficiente $(1+i)^n$ a um coeficiente (1+i), de juros simples, sem alterar a estrutura matemática da Tabela Price.

Tomemos a Eq. 5 igualada a zero, resultando na expressão:

$$P(1+i)^n - A(1+i)^{n-1} - A(1+i)^{n-2} - ... - A(1+i) - A = 0$$

O primeiro passo é confirmar que existe uma solução A tal que a igualdade exposta na Eq. 5 seja verdadeira. Se admitirmos que $P > A$, sempre haverá soluções para a expressão. Esta premissa é verdadeira, pois a parcela de pagamento sempre será inferior ao total da dívida.

Na seqüência, é necessário impor a condição $(1+i) \neq 0$. Isso equivale dizer que $i \neq -1$. Com efeito, em aplicações para casos reais, i será sempre maior que 0 ($i > 0$), pois é a taxa de juros a ser cobrada pelo empréstimo. Logo, esta condição é verdadeira.

Obedecendo estas duas condições, é possível dividir ambos os lados da igualdade por $(1+i)^{n-1}$ sem alterar o significado, a seguir.

$$\frac{P(1+i)^n - A(1+i)^{n-1} - A(1+i)^{n-2} - \ldots - A(1+i) - A}{(1+i)^{n-1}} = \frac{0}{(1+i)^{n-1}}$$

Efetuando os cálculos, chegamos a Eq. 9, onde o termo P é multiplicado por (1+i), ou seja, juros simples. Perceba-se que a igualdade da equação permanece verdadeira.

$$P(1+i) - A - \frac{A}{(1+i)} - \frac{A}{(1+i)^2} - \ldots - \frac{A}{(1+i)^{n-2}} - \frac{A}{(1+i)^{n-1}} = 0 \qquad (9)$$

Resolvendo esta equação em A, chegaremos a uma fórmula alternativa para o modelo matemático da Tabela Price, expressa pela Eq. 10.

$$A = \frac{Pi}{1 - (1+i)^{-n}} \qquad (10)$$

5.4 Análise dos Limites da Função Matemática da Tabela Price

Os resultados apresentados até agora são demonstrações formais da hipótese de não ocorrência de capitalização de juros na Tabela Price e, apesar de mostrarem uma abordagem diferente, apresentam muito pouca novidade no que já foi escrito.

Nesta subseção, apresentaremos uma visão nova, utilizando o cálculo diferencial para mostrar que o modelo matemático da Tabela Price apresenta um comportamento linear em relação ao juro do empréstimo e que, para empréstimos de longo prazo, o devedor paga apenas os juros, que são suficientes para amortizar o empréstimo.

Quando se deseja estudar o comportamento de funções complexas, é usual calcular os seus limites, em relação a 0 e ao infinito (entendido como um número muito grande). Segundo Guidorizzi (1997), o limite de uma função em relação a um determinado número é valor que esta assumiria quando calculada em relação àquele. Matematicamente, temos a Eq. 11.

$$\lim_{x \to g} f(x) = f(g) \qquad (11)$$

No caso da Tabela Price, o cálculo do limite tendendo a zero não faz sentido, pois não existem empréstimos com zero prestações. No entanto, o cálculo do limite da função tendendo a infinito é significativo, vez que empréstimos tendem a apresentar grande número de parcelas, coerentes com a noção de infinito como um número muito grande, segundo Russell (2007).

Assim, calculamos o limite da equação da Tabela Price com o número de parcelas n tendendo ao infinito, mostrado a seguir.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Pi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{Pi(1+i)^\infty}{(1+i)^\infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Que é uma indeterminação. Para este caso, segundo Guidorizzi (1997), pode ser empregada a regra de L'Hospital, onde o limite da divisão de duas funções indeterminadas pode ser calculado como a divisão das derivadas de cada uma das funções, de acordo com Eq. 12.

$$\lim_{n \to x} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to x} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{12}$$

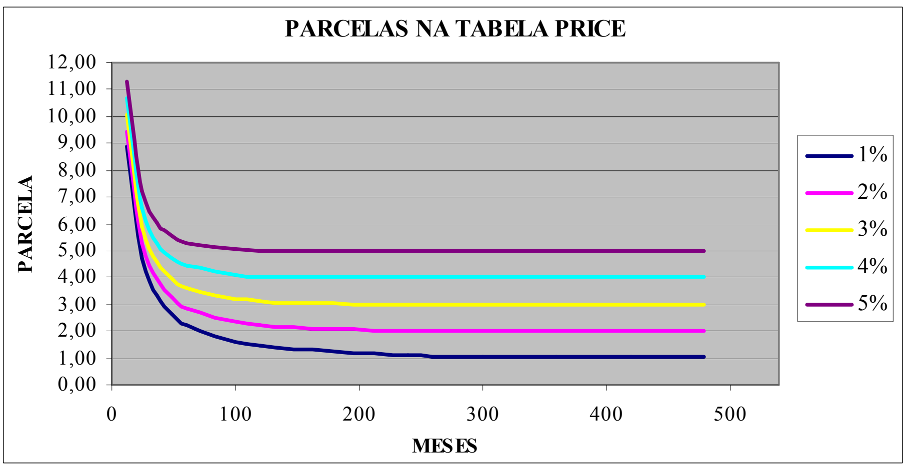
Operando as derivadas do denominador e do numerador, e calculando o limite com n tendendo ao infinito, teremos:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{Pi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{Pin(1+i)^{n-1}}{n(1+i)^{n-1}} = Pi$$

Um resultado bastante importante emerge deste cálculo. Para empréstimos com um grande número de parcelas, a equação matemática da Tabela Price apresenta comportamento linear, acarretando inexistência de capitalização. Tal resultado não é surpreendente, pois em outros tópicos deste trabalho, esta conclusão já havia sido obtida.

Em empréstimos com grande número de parcelas, que é o usual, a parcela da Tabela Price tende ao juro. Em outras palavras, o devedor que faça operações lastreadas na Tabela Price não precisa pagar a amortização, pois os próprios juros se encarregam de quitar o principal. Para ilustrar as conclusões, apresentamos a Fig. 1, constituída de um gráfico que descreve o comportamento da prestação calculada pela Tabela Price, para um empréstimo de R$ 100,00, em função do número de parcelas, para diferentes taxas de juro.

Fig. 1 : Parcelas calculadas pela Tabela Price para diferentes períodos e taxas de juro



Pelo gráfico observamos que as parcelas da Tabela Price, que envolvem juros e amortização, a partir aproximadamente de 250 prestações, convergem para o valor Pi. Isto significa que um devedor que tome empréstimos com parcelas calculadas pela Tabela Price não precisará pagar o principal, pois o valor dos juros será suficiente para pagar a dívida.

Também fica claro que as parcelas são proporcionais a Pi, ou seja, ao juro da dívida, o que evidencia a não contagem de juros sobre juros, ou capitalização de juros, em empréstimos calculados através da Tabela Price.

6. CONCLUSÃO

Muita polêmica foi suscitada pela utilização da Tabela Price, que, apesar de suas vantagens, se tornou a ovelha negra dos sistemas de amortização. Algumas críticas, apesar de incorretas, tinham validade científica, uma vez que eram baseadas em pressupostos. Entretanto, muitas outras eram absolutamente desprovidas de qualquer fundamentação.

Um dos pomos da discórdia é a existência do fator exponencial $(1+i)^n$, o que levou muitos a acreditar que a Tabela Price incorporava a teoria dos juros compostos, ou contemplava a capitalização em sua estrutura. Como visto, a partir de análise matemática um pouco mais rigorosa, percebemos que retromencionado fator não faz parte de sua estrutura, tampouco é utilizada a teoria dos juros compostos para chegar à sua formulação.

É possível obter os resultados da Tabela Price sem utilizar qualquer consideração sobre juros compostos, aplicando o juro apenas ao saldo devedor no período. Neste ponto, o trabalho não inova, pois vários autores já chegaram à mesma conclusão, apenas apresenta uma solução analítica, o que, formalmente é mais conveniente.

A alegação de que, pelo fato do próprio Richard Price afirmar que a tabela era derivada de juros compostos, como prova da ocorrência de capitalização não pode ser considerada, uma vez que confronta com os resultados das análises matemáticas. Também vimos ser possível a interpretação pela teoria do juro composto sem concluir pela ocorrência de capitalização, muito embora a mesma seja desaconselhada, uma vez que o princípio da Tabela Price são as prestações iguais (a Tabela Price também é conhecida como Série de Pagamentos Uniformes, o que nos parece ser a denominação mais conveniente).

A utilização do cálculo diferencial comprova a inocorrência de capitalização em parcelas calculadas através da Tabela Price. Além disso, percebe-se que para empréstimos de longo prazo, como tem sido praxe nas operações de crédito, acabam por convergir as parcelas para o termo de juros, anulando a parcela de amortização, desonerando o devedor deste compromisso.

A tendência legal brasileira é a de liberar a capitalização de juros em períodos inferiores a um ano, bem como a Tabela Price. A Medida Provisória nº 2.170, em sua 36ª edição, de 23 de agosto de 2001 autoriza expressamente o pacto de capitalização em períodos inferiores a um ano. Além disso, a Lei Federal nº 11.977, de 07 de julho de 2009 autoriza a capitalização mensal e o uso da Tabela Price em operações do Sistema Financeiro Imobiliário.

7. BIBLIOGRAFIA

ARAGÃO, José Maria. Sistema financeiro da habitação. Curitiba: Ed. Juruá, 2006;

BERNARDES, Cláudio. Tabela Price. O sistema de amortização utilizado no mundo todo. Revista Engenharia. São Paulo: Instituto de Engenharia, Edição 534, 1999;

CAMPOS FILHO, Ademar *et all*. Declaração em defesa de uma ciência matemática e financeira, 2004. Disponível em <http://www.sindecon-esp.org.br>;

CANÇADO, Romualdo W. e Orlei C. de Lima. Juros. Correção monetária. Danos financeiros irreparáveis: uma abordagem jurídico-econômica. Belo Horizonte: Ed. Del Rey, 1999;

CHAVES, Oziel. Há anatocismo na Tabela Price? Jus Navigandi, 2002, disponível em <http://www1.jus.com.br/doutrina>;

DEL MAR, Carlos Pinto. Aspectos jurídicos da Tabela Price. Ed. Jurídica Brasileira, 2001;

GITMAN, Lawrence. Princípios de administração financeira. São Paulo: Ed. Harba, 2002;

GUIDORIZZI, Hamilton L. Um curso de cálculo. São Paulo: Ed. LTC, 1997, Vol. 1;

NUNES, Pedro. Dicionário de tecnologia jurídica. Rio de Janeiro: Ed. Renovar, 1999;

PONTES DE MIRANDA, Francisco Cavalcanti. Tratado de Direito Privado. São Paulo: Ed. Revista dos Tribunais, 1984, Vol. 24;

POPPER, Karl. Conhecimento objetivo. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia, 1973;

POPPER, Karl. A lógica da pesquisa científica. São Paulo: Ed. Cultrix, 2007;

PRICE, Richard. Observations on reversionary payments. Londres: T. Cardell, 1771;

REZENDE, Teotônio C. A Tabela Price e a polêmica dos juros. Revista Sistema de Financiamento Imobiliário. No. 29 (Outubro, 2009), pg. 44-54, disponível em <www.abecip.org.br>;

RUSSELL, Bertrand. Introdução a filosofia matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007;

SCAVONE JR. Luiz Antonio. Juros no Direito Brasileiro. São Paulo: Ed. Revista dos Tribunais, 2009;

SILVA, De Plácido e. Vocabulário jurídico. Rio de Janeiro: Ed. Forense, 1998;

SIMONSEN, Mário Henrique. Ensaios analíticos. Rio de Janeiro: Ed. Fundação Getúlio Vargas, 1994;

SOUZA, Alceu e Ademir Clemente. Matemática financeira. São Paulo: Ed. Atlas, 2000;

VIEIRA SOBRINHO, José D. Matemática financeira. São Paulo: Ed. Atlas, 2000;

WITTGENSTEIN, Ludwig. Tratactus Logico-Philosophicus. São Paulo: EDUSP, 2001.